Prof. Amador Martin-Pizarro
Dr. Daniel Palacin

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2018/2019

Bewertete Körper
Blatt 8
Abgabe: 17.12.2018

Aufgabe 1 (20 Punkte)**.** Seien K ein Körper der Charakteristik $p > 0$ und $\bar{K}$ ein fester algebraischer Abschluss von K. Setze

$$K^{ins} = \{\alpha \in \bar{K} \mid \alpha^{p^n} \in K \text{ für ein } n \text{ aus } \mathbb{N}\}.$$

(a) Beschreibe alle Wurzel des Polynomes $T^{p^n} - 1$ in $\bar{K}$.

(b) Zeige, dass jedes irreduzible Polynom $f(T)$ mit Koeffizienten aus K sich als $g(T^{p^n})$ für ein n aus $\mathbb{N}$ schreiben lässt, wobei $g(T)$ ein separables Polynom mit Koeffizienten aus K ist.

(c) Zeige, dass α aus $\bar{K}$ genau dann in K^{ins} liegt, wenn sein minimales Polynom über K eine einzige Nullstelle in $\bar{K}$ besitzt.

(d) Wenn K^{sep} der separable Abschluss von K in $\bar{K}$ ist, zeige, dass jede endliche Körpererweiterung $K \subset F$ mit $F \subset K^{sep}$ der Form $F = K(\alpha)$ ist.

(e) Zeige, dass $K^{sep} \cap K^{ins} = K$.

(f) Zeige, dass jedes Element σ aus $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ den Körper K^{ins} punktweise fixiert.

(g) Zwei Körpererweiterungen L und M von K innerhalb einen gemeinsamen Körper sind *linear disjunkt*, wenn für jedes n aus $\mathbb{N}$ und Elemente $a_1, \ldots, a_n$ aus L, welche linear unabhangig über K sind, die Elemente $a_1, \ldots, a_n$ auch linear unabhängig über M sind.

Zeige, dass K^{sep} und K^{ins} linear disjunkt über K sind.

HINWEIS: Für ein separables Element, was ist der Bezug zwischen dem Grad des Minimalpolynomes und der Anzahl der verschiedenen Konjugierte unter der Galoisgruppe?

(h) Zeige, dass die Körpererweiterung $K^{sep} \subset \bar{K}$ rein inseparabel ist.

(i) Zeige, dass die Körpererweiterung $K^{ins} \subset \bar{K}$ separabel ist.

HINWEIS: Die symmetrischen Funktionen werden unter der Wirkung der Galoisgruppe fixiert.

(j) Schließe daraus, dass der von $K^{sep} \cup K^{ins}$ erzeugte Körper $K^{sep}K^{ins}$ gleich $\bar{K}$ ist.

Abgabe der Übungsblätter in den Briefkasten 3.29 im UG der Ernst-Zermelo-Strasse 1. Die Übungsblätter müssen bis 10 Uhr am jeweils angegebenen Abgabedatum eingeworfen werden.